Théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) < c$ et $f(b) > c$, alors $\exists \xi \in ]a,b[$ t.q. $f(\xi) = c$.

(Analogue si on a $f(a) > c$, $f(b) < c$, il suffit considérer $-f$).

Preuve. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - c$ au lieu de $f$, on se ramène au cas $c = 0$.

Soit $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$.

$X \neq \emptyset$ car $a \in X$.

$X$ est majoré (par $b$).

Par la propriété de la borne supérieure, $\exists \xi = \sup X$.

Montrons que $f(\xi) = 0$. Par absurde, supposons $f(\xi) = d \neq 0$.

- Cas $d > 0$ : Soit $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$. Par continuité de $f$, $\exists \delta > 0$ tq
$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < \frac{d}{2}$. C'est à dire $0 < \frac{d}{2} < f(x) < \frac{3}{2} d$ $(*)$.
$\Updownarrow$
$\xi - \delta < x < \xi + \delta$.

Par la déf. de la borne sup, $\forall \delta > 0$ $\exists x \in \xi - \delta$ tq. $x \in X$. (c'est à dire, $f(x) < 0$)
en contradiction avec $(*)$

- Cas $d < 0$ : Soit $\varepsilon = -\frac{d}{2} > 0$. Par continuité de $f$, on a : $\exists \delta > 0$ tq
$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < -\frac{d}{2}$ $\left(\Leftrightarrow \frac{3}{2} d < f(x) < \frac{d}{2} < 0\right)$.

Donc pour $x = \xi + \frac{\delta}{2} > \xi$, on a $f(x) < 0$, donc ~~f(x)~~ $x \in X$, en contradiction avec $\xi$ majorant de $X$. $\square$

Corollaires : 1) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue admet $a_0 < b_0$ t.q. $f(a_0)$, $f(b_0)$ ont signe opposé, alors $\exists x_0 \in ]a_0, b_0[$ t.q. $f(x_0) = 0$. (Bolzano pour $f|_{[a_0,b_0]}$).

2) $P$ polynôme de degré $n$ impair : $P(x) = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_n} x^n + \dots + a_0$.

Alors $\exists x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$.

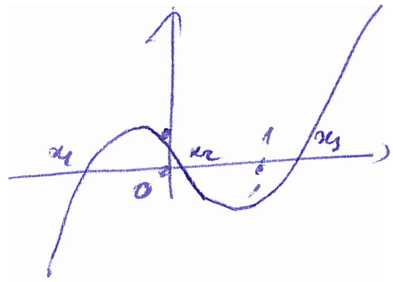
Preuve : Sans perte de généralité, on assume $a_n = 1$.

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$.

Donc $P$ assume valeurs positives et négatives en $\mathbb{R}$, et [illegible] conclut par 1.

Exemple : $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$. $P(0) = 1$, $P(1) = -1$. $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \pm\infty$.

Par boLzano, $\exists$ solutions $x_1 \in ]-\infty, 0[$, $x_2 \in ]0, 1[$, $x_3 \in ]1; +\infty[$.




3) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors $f$ possède au moins un point fixe ($\exists \xi = f(\xi)$).

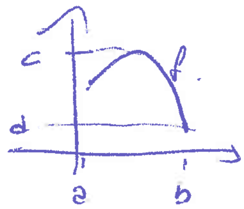
Preuve : On applique 1 à $\cancel{g}(x \mapsto f(x) - x$ (qui est continue)).

Existence du maximum minimum

Théorème : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\exists c \leq d$ tels que $f([a,b]) = [c, d]$.

En particulier, $f$ atteint maximum et minimum sur $[a,b]$.




Remarque : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$ (par le théorème des valeurs intermédiaires), mais l'inclusion peut être stricte (comme dans l'exemple)

Fonctions Monotones:

Limites:

Théorème: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur un intervalle ouvert $I$.
Alors $\forall x_0 \in I$, les limites $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existent.

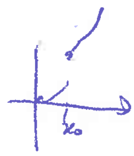
Preuve : Supposons $f$ croissant (décroissant est analogue) (limite à droite)

Soit $Y=\{f(x) \mid x\in I,\ x>x_0\} = f(]x_0,+\infty[\cap I)$.

$Y$ n'est pas vide (car $]x_0,+\infty[\cap I$ ne l'est pas) et $Y$ est minoré par $f(x_0)$ (car $f$ est croissant). $\Rightarrow \exists u_0 = \inf Y$. On veut montrer $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

Par déf. de borne inf, $\forall \varepsilon>0,\ \exists u_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$, $x_\varepsilon > x_0$, et $\overset{u_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)} < u_0+\varepsilon$.

De plus $u_\varepsilon \geq u_0$ car $u_0=\inf Y$.





Donc pour $x$ tq $x_0<x<x_\varepsilon$, on a

$$u_0 \le f(x) \le f(x_\varepsilon) < u_0+\varepsilon$$

Donc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = u_0$.

De façon analogue pour $x_0^-$.

□

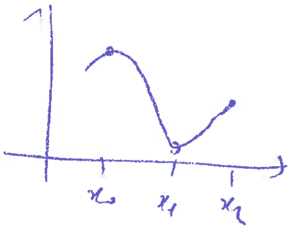
Rmq: Un théorème analogue vaut pour $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $b=\sup I$, et pour $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $a=\inf I$.

# Fonctions strictement monotones et continues.

On a vu que une fonction strictement monotone est toujours injective, et que sa bijection réciproque $f^{-1}: f(I) \to I$ est aussi monotone.

On va voir que ~~la~~ la réciproque de cette affirmation est vraie pour $f: I \to \mathbb{R}$ continue, $I$ intervalle.

**Prop:** Si $f: I \to \mathbb{R}$ est continue et injective. Alors $f$ est strictement monotone. ($I$ intervalle)




Preuve: Soient $x_0 < x_1 < x_2$ 3 points.

On veut montrer que soit $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$, soit $f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$

Supposons par l'absurde que $f(x_1) \notin$ l'intervalle ouvert entre $f(x_0)$ et $f(x_2)$. Supposons par exemple

~~$f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ Par injectivité, il faut avoir des < stricts.~~

~~supposons~~ $f(x_0) > f(x_2) > f(x_1)$. (autres cas analogues)

$\Rightarrow$ Comme $f$ est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists \xi \in ]x_0, x_1[$ t.q. $f(\xi) = f(x_2)$. Mais $x_2 \notin ]x_0, x_1[$, donc $x_2 \neq \xi$, a contradiction avec l'injectivité. □

Lemme: $f$ ~~Rappel~~ croissante continue $\Rightarrow$ $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. (Valeurs intermédiaires)

**Théorème:** $f: [a,b] \to [c,d]$ continue et bijective. Alors elle est monotone, et $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ est continue et monotone aussi.

Preuve: $f$ continue et injective $\Rightarrow$ $f$ monotone $\Rightarrow$ $f^{-1}$ monotone déjà vu.

$\forall y_0 \in [c,d]$ $\exists! x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) = y_0$. Par ~~continuité de $f$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$~~

~~$f(]x_0-\delta, x_0+\delta[) \subset ]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$~~ Considérons $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ $\forall \varepsilon > 0$.

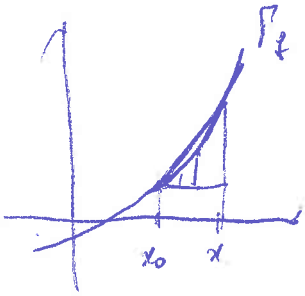
$f(]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[) = ]f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)[ \supseteq ]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ pour un certain $\delta$.

(car $f(x_0-\varepsilon) < \underbrace{f(x_0)}_{y_0} < f(x_0+\varepsilon)$)

il s'en suit que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $y \in ]y_0-\delta, y_0+\delta[ \Rightarrow f^{-1}(y) \in ]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ et $f^{-1}$ est continue. □

---

Fonctions dérivables :




On veut comprendre le comportement locale de f autour de $x_0$. On veut donc étudier la variation $f(x)-f(x_0)$ par rapport à $x-x_0$, quand $x$ est assez proche de $x_0$.

Déf : Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle $I$, et soient $x_0, x_1 \in I$ deux points : le taux d'accroissement entre $x_0$ et $x_1$ est la valeur $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Soit $m$ ce nombre, alors la droite $y = \left(\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0) + f(x_0)$ intersecte le graphe de $\Gamma_f$ de $f$ au moins en $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

On veut comprendre la limite pour $x \to x_0$.

Déf : (Cauchy) $f: I \to \mathbb{R}$ $I$ intervalle ouvert, $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$.

$f'(x_0)$ est la dérivée de $f$ en $x_0$.

Si $f$ est dérivable en chaque point de $I$, on dit que $f$ est dérivable (sur $I$).

Si de plus $f'$ est continue, on dit que $f$ est continûment dérivable, ou (de classe) $C^1$.

Ex : $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ est dérivable, $f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x \leq 0 \end{cases}$

$f'$ n'est pas dérivable en 0.

Déf (Weierstrass) $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \iff \exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}$ et $r: I \to \mathbb{R}$ continue en $x_0$ satisfaisant $r(x_0) = 0$ et :

(*) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\, r(x)$

$\underbrace{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$

équation de la droite tangente à $\Gamma_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

Déf : $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \iff \exists \varphi: I \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$. $\varphi(x_0)$ est la dérivée $f'(x_0)$ de $f$ en $x_0$.

Exemples. $P(x)$ polynôme est dérivable...

- $f(x) = |x|$ est dérivable en $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

Mais elle n'est pas dérivable en $0$ car $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Proposition : $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en $x_0$.

Preuve : dérivable : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + r(x))$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + r(x))$.

$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0$ tq $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Car $f'(x_0) + r(x)$ est bornée dans un voisinage de $x_0$.

□

Dérivée à gauche-droite.

Déf : Soit $f: I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0^+$ (resp. $x_0^-$). On dit que $f$ est dérivable à ~~gauche (/droite)~~ droite / gauche en $x_0$ ssi $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(analogue pour $x_0^-$).

C15 - 7

Proposition : $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0$. Alors $f$ est dérivable en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ est dérivable à droite / gauche en $x_0$, et les deux limites coïncident.

Preuve : directement de la propriété analogue des limites.

Rmq : $|x| \mapsto |x|$ admet ~~limite~~ dérivées à droite $=1$, à gauche $=-1$ en $0$. Elles ne coïncident pas $\Rightarrow$ $f$ n'est pas dérivable en $0$.